TD 6 : Intégrales généralisées - Corrigé

Exercice 1 :

1) $t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$

$= \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{1+t^2}\right]_0^x = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{1+x^2}+1\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(1+x^2)} \to \dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On peut donc dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}$

$t \mapsto te^{-t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x te^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_0^x -2te^{-t^2}dt$

$= -\dfrac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^x = -\dfrac{1}{2}\left(e^{-x^2}-1\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-x^2} \to \dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On peut donc dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = \frac{1}{2}$

$t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $]0;1]$ et pour tout $x \in]0;1]$, $\displaystyle\int_x^1 t\ln(t)\,dt = \int_x^1 t \times \ln(t)\,dt$

On pose $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln(t)$:
les fonctions u et v sont de classe C^1sur $[x;1]$, on peut donc appliquer une IPP

$\displaystyle\int_x^1 t \times \ln(t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t}dt = -\frac{x^2\ln(x)}{2} - \int_x^1 \frac{t}{2}dt = -\frac{x^2\ln(x)}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_x^1$

$= -\dfrac{x^2\ln(x)}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{x^2}{4} \to -\dfrac{1}{4}$ lorsque x tend vers 0.

On peut donc dire que $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,dt = -\frac{1}{4}$

2) Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ et $t \mapsto te^{-t^2}$ sont impaires

De plus les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ sont convergentes

On peut donc affirmer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ convergent et valent 0.

3) $t \mapsto \dfrac{1}{t-1}$ est continue sur $]1;2]$ et pour tout $x \in]1;2]$, $\displaystyle\int_x^2 \frac{1}{t-1}dt = [\ln(t-1)]_x^2 = -\ln(x-1)$

$\displaystyle\lim_{x\to1} \ln(x-1) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to1} \int_x^2 \frac{1}{t-1}dt = +\infty$: l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t-1}\,dt$ est divergente.

$u \mapsto \dfrac{u^2}{1+u^4}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc en particulier sur $[1;+\infty[$

$\dfrac{u^2}{1+u^4} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u^2}{u^4} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^2}$ et les fonctions $u \mapsto \dfrac{u^2}{1+u^4}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ sont positives sur $[1;+\infty[$.

Par comparaison, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,du$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,du$ sont de même nature

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,du$ est une intégrale de Riemann convergente donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,du$ converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,du = \underbrace{\int_0^1 \frac{u^2}{1+u^4}\,du}_{\text{intégrale sur un segment}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,du}_{\text{intégrale convergente}}$$: est convergente.

$x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est continue sur $[1;+\infty[$

$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et les fonctions $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont positives sur $[1;+\infty[$.

Par comparaison, les intégrales $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ sont de même nature

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente donc $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,dx$ converge.

<u>Exercice 2</u> :

1)) $t \mapsto \frac{t+1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0;1]$ et pour tout $x \in]0;1]$, $\int_x^1 \frac{t+1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_x^1 \left(\frac{t}{\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$

$$= \int_x^1 \left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt = \int_x^1 \left(t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)dt = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_x^1 = 2\left(\frac{1}{3}+1-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}-x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{8}{3}-2\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+x^{\frac{1}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^1 \frac{t+1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{8}{3}$: l'intégrale $\int_0^1 \frac{t+1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et vaut $\frac{8}{3}$.

2) On applique le changement de variable $t = u-1$

Les changements de variable affines sont les seuls acceptés dans les intégrales généralisées…

Bornes : si $u=1$ alors $t=0$ et si $u=2$ alors $t=1$.

$t = u-1$ donc $dt = du$

$$\frac{u}{\sqrt{u-1}} = \frac{t+1}{\sqrt{t}}$$

Ainsi, $\int_1^2 \frac{u}{\sqrt{u-1}}\,du = \int_0^1 \frac{t+1}{\sqrt{t}}\,dt$ donc $\int_1^2 \frac{u}{\sqrt{u-1}}\,du$ et vaut $\frac{8}{3}$

<u>Exercice 3</u> : EDHEC 2003

1. a) I_n est impropre en $+\infty$ (car f continue sur $]0,+\infty[$)

   $\int_n^M \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_{x=n}^M = -e^{\frac{1}{M}}+e^{\frac{1}{n}} \to e^{\frac{1}{n}}-1$ quand $M \to +\infty$ donc I_n converge et est égale à $I_n = e^{\frac{1}{n}}-1$

   b) Or $e^x-1 \sim x$ quand $x \to 0$ et comme $\frac{1}{n} \to 0$ alors $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2. On a $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ et comme la série des $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Rieman) alors, par réquivalence de séries à termes positifs, la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. a) Pour encadrer l'intégrale, on encadre tout d'abord f et pour celà, on détermine son sens de variations :

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}x^2-2xe^{\frac{1}{x}}}{x^4}=\frac{-(1+2x)\,e^{\frac{1}{x}}}{x^4}<0 \text{ sur }]0,+\infty[$$

donc pour $0<k\leq x\leq k+1$ on a $f(k)\geq f(x)\geq f(k+1)$ ($f(k)$ et $f(k+1)$ constantes par rapport à x) et l'inégalité de la moyenne donne alors comme $k\leq k+1$:

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\,dx\leqslant f(k).$$

(ou en intégran,t l'inégalité **par raport à** x)

b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

On somme alor sl'inégalité précédente de n à M :

$$\sum_{k=n}^{M}f(k+1)\leqslant\sum_{k=n}^{M}\int_k^{k+1}f(x)\,dx\leqslant\sum_{k=n}^{M}f(k)$$

réindexé $h=k+1$ pour la première somme donc

$$\sum_{h=n+1}^{M+1}f(h)\leqslant\int_n^{M+1}f(x)\,dx\leqslant\sum_{k=n+1}^{M}f(k)+f(n)$$

$$\sum_{h=n+1}^{M+1}f(h)\leqslant\int_n^{M+1}f(x)\,dx\leqslant\sum_{k=n+1}^{M}f(k)+f(n)$$

et par passage à la limiet dans les inégalités (les séries et l'intégerale convergent quand $M\to+\infty$)

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\leqslant I_n\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k+\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

c) On a alors le double encadrement :

$$I_n-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\leqslant I_n$$

et en divisant par I_n qui tend vers $+\infty$,

$$1-\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2I_n}\leq\frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k}{I_n}\leqslant 1$$

par encadrement $\frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k}{I_n}\to 1$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}\sim I_n\sim\frac{1}{n}\text{ quand } n\to+\infty}$

Exercice 4 : EDHEC 2004

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt$ et on a, en particulier, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}dt$

1. La fonction $t \to \frac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[0,1]$ (car $1+t+t^n \neq 0$) donc $\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt$ est bien définie.

2. On a

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^0}dt = \int_0^1 \frac{1}{2+t}dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln(3) - \ln(2) \\ &= \ln(3/2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+t+t}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+2t}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln(3) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{u_0 = \ln(3/2) \text{ et } u_1 = \frac{1}{2}\ln(3)}$

3. a) Pour comparer les intégrales u_n et u_{n+1}, on compare leurs contenus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t+t^n} - \frac{1}{1+t+t^{n+1}} &= \frac{t^{n+1}-t^n}{(1+t+t^n)(1+t+t^{n+1})} \\ &= \frac{t^n(t-1)}{(1+t+t^n)(1+t+t^{n+1})} \\ &\leq 0 \text{ sur } [0,1] \\ \text{et } \frac{1}{1+t+t^n} &\leq \frac{1}{1+t+t^{n+1}} \end{aligned}$$

et comme (ordre des bornes) $0 \leq 1$, on a alors

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^{n+1}}dt$$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } u \text{ est donc croissante.}}$

b) Là encore, on majore le contenu, par une quantité qui ne dépend pas de n :
Si $t \in [0,1]$ alors $t^n \geq 0$ et $1+t+t^n \geq 1+t > 0$ donc $\frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t}$ et comme $0 \leq 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt &\leq \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^1 \\ &\leq \ln(2) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ln(2)}$

c) La suite u est donc croissante et majorée par $\ln(2)$ donc convergente vers une limite $\ell \leq \ln(2)$

4. a) Pour écrire $\ln(2)-u_n$ sous forme d'intégrale, on écrit $\ln(2)$ sous la forme trouvée précédemment :

$$\begin{aligned}\ln(2)-u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt-\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}-\frac{1}{1+t+t^n}dt\\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)}dt\end{aligned}$$

b) Pour obtenir le $\frac{1}{n+1}$, on devine une primitivation de t^n, que l'on va conserver dans la majoration du contenu :
sur $[0,1]$ on a $t+1\geq 1$ et $t+t^n+1\geq 1$ donc $(t+1)(t+t^n+1)\geq 1$ et $\frac{1}{(t+1)(t+t^n+1)}\leq \frac{1}{1}$
d'où $\frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)}\leq t^n$ car $t^n\geq 0$ et comme $0\leq 1$

$$\begin{aligned}\ln(2)-u_n &= \int_0^1 \frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)}dt\\ &\leq \int_0^1 t^n\,dt=\left[\frac{t^n}{n+1}\right]_0^1\\ &\leq \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \ln(2)-u_n\leq \frac{1}{n+1}}$

c) On a une majoration. Pour conclure, on cherche l'encadrement :
$0\leq \frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)}$ sur $[0,1]$ alors $0\leq \ln(2)-u_n\leq \frac{1}{n+1}$
Et comme $\frac{1}{n+1}\to 0$ alors par encadrement $\ln(2)-u_n\to 0$ et
Conclusion : $\boxed{u_n\to \ln(2) \text{ quand } n\to+\infty}$

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt.$

a) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$ est impropre en $+\infty$
On prouve sa convergence par comparaison :
$\frac{1}{1+t+t^n}=\frac{1}{t^n}\frac{1}{1+1/t^{n-1}+1/t^n}\sim\frac{1}{t^n}$ car $n\geq 2$ et donc t^n et $t^{n-1}\to 0$ quand $t\to+\infty$
Comme $n>1$ alors $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^n}dt$ converge (intégrale de Riemann) et par comparaison d'intégrales de fonction positives, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$ *converge*.
Conclusion : $\boxed{v_n \text{ est bien définie pour } n\geq 2}$

b) Pour $t\geq 1$ on a $1+t\geq 0$ et $1+t+t^n\geq t^n>0$ donc $0\leq\frac{1}{1+t+t^n}\leq\frac{1}{t^n}$ donc pour $1\leq M$ on a

$$\begin{aligned}\int_1^M\frac{1}{1+t+t^n}dt &\leq \int_1^M\frac{1}{t^n}dt=\left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}\right]_1^M\\ &\leq \frac{1}{n-1}\left(-\frac{1}{M^{n-1}}+1\right)\\ &\leq \frac{1}{n-1}\end{aligned}$$

et par passage à la limite dans l'inégalité, quand $M \to +\infty$

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt \leq \frac{1}{n-1}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}}$

c) Donc par encadrement $v_n \to 0$ quand $n \to +\infty$
Comme l'intégrale impropre en $+\infty$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ converge, alors

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt &= \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt \\ &\to \ln(2) \text{ quand } n \to +\infty \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt = \ln(2)}$.

<u>Exercice 5</u> : EDHEC 2007

1. a) On étudie les variations de $g(x) = x - \ln(x)$
g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		
$x-1$		$-$	0	$+$	affine
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+ \searrow$	1	$\nearrow +$	

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x > 0 : g(x) > 0}$

b) f est définie en 0 et en x tel que $x > 0$ et $x - \ln(x) \neq 0$.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est définie sur } [0,+\infty[}$

2. a) f est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues.
En 0 : pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(x)(-1 + x/\ln(x))} \\ &= \frac{1}{-1 + x/\ln(x)} \to -1 = f(0) \end{aligned}$$

Donc f est continue en 0.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

b) Pour $x > 0$, le taux d'accroissement en 0 est :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{\ln(x)}{x-\ln(x)} + 1}{x} \\ &= \frac{\ln(x) - \ln(x) + x}{x(x - \ln(x))} \\ &= \frac{1}{x - \ln(x)} \to 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en } 0^+ \text{ et } f'_d(0) = 0}$

3. a) Sur $]0,+\infty[$ on a $x-\ln(x)\neq 0$ donc f y est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x-\ln(x))\frac{1}{x}-\ln(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln(x))^2}\\
&= \frac{x-\ln(x)-\ln(x)(x-1)}{x(x-\ln(x))^2}\\
&= \frac{x-x\ln(x)}{x(x-\ln(x))^2}\\
&= \frac{1-\ln(x)}{(x-\ln(x))^2}
\end{aligned}$$

b) En $+\infty$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(x)}{x-\ln(x)}\\
&= \frac{\ln(x)}{x(1-\ln(x)/x)}\\
&\to 0 \text{ car } \ln(x)=o(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f(x)\to 0 \text{ quand } x\to+\infty}$

c) On a alors :

x	0			e			$+\infty$
$1-\ln(x)$		$+$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-$	
$f'(x)$	0	$+$		0	$-$		
$f(x)$	-1	$\nearrow$		$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$		0

4. Comme $x-\ln(x)>0$ le signe de $f(x)$ est celui de $\ln(x)$ (et négatif en 0)

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	

5. Pour tout réel x élément de D on pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

a) Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ alors F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $F'(x)=f(x)$ et donc F' est continue.

Conclusion : $\boxed{F \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$ et son sens de variation est donné par le signe de f :

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$F(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

b) Comme $\frac{\ln(t)}{t}\geq\frac{1}{t}\geq 0$ pour $t\geq e$ et que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ diverge alors par minoration de fonction positive $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t}dt$ diverge et

Conclusion : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\ln(t)}{t}dt=+\infty}$

N.B. on pouvait aussi primitiver (car $\frac{1}{x}$ est la dérivée de $\ln(x)$ par rapport à x) en $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$

c) On a un équivalent en $+\infty$ en factorisant :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(t)}{t-\ln(t)} &= \frac{\ln(t)}{t}\frac{1}{1-\ln(t)/t}\\
&\sim \frac{\ln(t)}{t}\geq 0
\end{aligned}$$

pour tout $t \geq 1$. Donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t-\ln(t)} dt$ diverge également et $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \dfrac{\ln(t)}{t} dt = +\infty$

Et donc

Conclusion : $\boxed{\lim_{+\infty} F = +\infty}$

Pour tracer une jolie courbe représentative, il faudrait en plus la direction asymptotique.

Exercice 6 : EML 2001

a) On a

$$t^2 f_n(t) = \frac{e^{-t} t^{n+2}}{n!} = \frac{1}{n!} t^{n+2}/e^t$$

Et comme $t^{n+2} = o(e^t)$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0$.

On a donc $0 \leq f_n(t) = o(t^{-2})$

Et comme $\int^{+\infty} t^{-2} dt$ converge (intégrale de Rieman), par comparaisopn de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$ impropre en $+\infty$ converge égalment.

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt \text{ est convergente.}}$

b) Pour $x \geq 0$, On intègre par parties (sur $[0, x]$, f_n est donnée par la première formule)
$u(t) = t^n : u(t) = nt^{n-1} : v'(t) = e^{-t} : v(t) = -e^{-t}$
Et comme u et v sont C^1

$$\int_0^x f_n(t)\ dt = \left[\frac{1}{n!} t^n e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{n!} n t^{n-1} e^{-t} dt$$

et pour $n \geq 1 : n! = n(n-1)!$ donc

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0; +\infty[, \qquad \int_0^x f_n(t)\ dt = -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)\ dt}$

c) On procède alors par récurrence :
- Pour $n = 0$: $\int_0^x f_0(t)\ dt = \int_0^x e^{-t}\ dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x} \to 1$ quand $x \to +\infty$
  Donc $\int_0^{+\infty} f_0(t)\ d$ converge et vaut 1
- Soit $n \geq 0$ tel que $\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt = 1$
  alors $n+1 \geq 1$ et $\int_0^x f_{n+1}(t)\ dt = -\frac{e^{-x}x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x f_n(t)\ dt \to 1$ quand $x \to +\infty$ car $x^{n+1}e^{-x} = x^{n+1}/e^x$ et $x^{n+1} = o(e^x)$
  Donc $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)\ d$ converge et vaut 1

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt \text{ converge et vaut } 1}$

d) f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive sur $\mathbb{R}$
$\int_{-\infty}^0 f_n = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = 1$

Conclusion : $\boxed{f_n \text{ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.}}$

<u>Exercice 7</u> : ECRICOME 2011

Partie I : Étude des zéros de φ

1. En $+\infty$: $\varphi(x) = 1 - x^2\ln(x) \to -\infty$
   $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x} - x\ln(x) \to -\infty$ et on a donc une branche parabolique verticale.
2. En 0 : $x^2\ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x^2} \to 0$ avec $\ln(x) = o(1/x^2)$
   Donc $\varphi(x) = 1 - x^2\ln(x) \to 1 = \varphi(0)$ donc φ est continue en 0.
   de plus elle est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues
   Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables ($x > 0$ pour le ln)

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -2x\ln(x) - \frac{x^2}{x} \\ &= -x(2\ln(x) + 1) \end{aligned}$$

4. En 0, on calcule le taux d'accroissement : pour $x > 0$

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = -x\ln(x) \to 0$$

   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} \varphi \text{ est dérivable en 0 et } \varphi'(0^+) = 0 \\ \text{et sa courbe a un tangente horizontale en 0} \end{array}}$

5.

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$2\ln(x)+1$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	
$-x$		$-$		$-$	
$\varphi'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

   (on résout de tête $2\ln(x) + 1 = 0$ puis on a le signe par le sens de variations)

6. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$.
   $\varphi > 0$ sur $[0, 1/\sqrt{e}]$ et il n'y a pas de solution sur cet intervalle.
   $\varphi(\sqrt{2}) = 1 - 2\ln(\sqrt{2}) = 1 - \ln(2) > 0$
   $\varphi(2) = 1 - 4\ln(2) < 0$

   et $\sqrt{2} > \frac{1}{\sqrt{a}}$ donc φ est continue et strictement décroissante sur $\left]\sqrt{2}, 2\right[$ donc bijective de $\left]\sqrt{2}, 2\right[$sur $\left]\lim_2 \varphi, \lim_{\sqrt{2}} \varphi\right[$, intervalle qui contient 0.
   Donc il existe un unique $\alpha \in \left]\sqrt{2}, 2\right[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.
   Et comme φ est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$, il n'y a pas d'autres solutions et sur $\left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ non plus.
   Conclusion : $\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha \text{ tel que : } \varphi(\alpha) = 0 \text{ et } \sqrt{2} < \alpha < 2.}$

7. $I=\int_0^\alpha \varphi(x)\,dx$

φ est continue sur $[0,\alpha]$ donc I converge.

Mais on ne peut pas la calculer en intégrant par parties sur $[0,\alpha]$ (dérivabilité de ln en 0)

Soit $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\alpha \varphi(x)\,dx &= \int_\varepsilon^\alpha 1-x^2\ln(x)\,dx\\ &= [x]_\varepsilon^\alpha - \int_\varepsilon^\alpha x^2\ln(x)\,dx\end{aligned}$$

soit $u(x)=\ln(x) : u'(x)=1/x$ et $v'(x)=x^2 : v(x)=x^3/3$ avec u et v de classe C^1 sur $[\varepsilon,\alpha]$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\alpha x^2\ln(x)\,dx &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_\varepsilon^\alpha - \int_\varepsilon^\alpha \frac{x^3}{3x}dx\\ &= \frac{\alpha^3}{3}\ln(\alpha) - x^3\ln(x) - \left[\frac{x^3}{9}\right]_\varepsilon^\alpha\\ &\to \frac{\alpha^3}{3}\ln(\alpha)-\frac{\alpha^3}{9}\end{aligned}$$

et donc

$$\int_\varepsilon^\alpha \varphi(x)\,dx \to \alpha-\frac{\alpha^3}{3}\ln(\alpha)+\frac{\alpha^3}{9}=\int_0^\alpha \varphi(x)\,dx$$

On se souvient que$\varphi(\alpha)=1-\alpha^2\ln(\alpha)=0$ donc $\alpha^2\ln(\alpha)=1$ et $\alpha^3\ln(\alpha)=\alpha$ d'où

$$\begin{aligned}I &= \alpha-\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha^3}{9}\\ &= \frac{\alpha(6+\alpha^2)}{9}\end{aligned}$$

8. C'est la méthode appelée « dichotomie ». Définissons d'abord la fonction `phi` :

```
function [z]=phi(x)
if x==0 then z=1
        else z=1-x^2*log(x)
end
endfunction
```

Puis programmons les termes des suites :

```
a=sqrt(2),b=2
for k=1:7 if phi(a)*phi((a+b)/2)<0 then b=(a+b)/2
                                 else a=(a+b)/2
          end
end
disp(b,a)
```

Exercice 8 : ESC 2002

1. Pour tout $x > 0$ on a $1 + x^2 \neq 0$ et $n + 1 + nx^2 \neq 0$ donc f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotients de fonctions continues.

   Comme $1 + x^2 > 0$ et $n + 1 + nx^2 > 0$ car $n > 0$ donc leurs signe est celui de $\ln(x)$

   On a alors :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$- \nearrow$	0	$\nearrow +$
$f_n(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-$	0	$+$

2. a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est impropre en $+\infty$.

   En intégrant par parties avec $u(x) = \ln(x)$: $u'(x) = \dfrac{1}{x}$: $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$: $v(x) = -\dfrac{1}{x}$

   u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} \int_1^M \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[-\ln(x)\frac{1}{x}\right]_1^M - \int_0^M -\frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln(M)}{M} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^M \\ &= -\frac{\ln(M)}{M} - \frac{1}{M} + 1 \\ &\to 1 \end{aligned}$$

   quand $m \to +\infty$ car $\ln(M) \ll M$.

   Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ converge et vaut 1.

   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1 + x^2 \geq x^2 > 0$ donc $\dfrac{1}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{x^2}$ et pour $x \geq 1$ comme $\ln(x) \geq 0$ alors $0 \leq \dfrac{\ln x}{1+x^2} \leq \dfrac{\ln x}{x^2}$

   Et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ converge alors par majoration $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_1^{+\infty} h(x)\, dx$ converge également.

   Dans toute la suite de l'exercice on note alors K l'intégrale impropre : $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\, dx$.

3. a) $\displaystyle\int_0^1 h(u)\, du$ est impropre en 0.

   Par changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$: $u = 1 \leftrightarrow x = 1$: $u = \varepsilon \leftrightarrow x = \dfrac{1}{\varepsilon}$:

   $x \to \frac{1}{x}$ de classe C^1 $\left[1, \frac{1}{\varepsilon}\right]$: $du = \frac{-1}{x^2} dx$

$$\int_\varepsilon^1 h(u)\, du = \int_{1/\varepsilon}^1 -h\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} dx$$

   Et comme

$$h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{x^2\ln(x)}{x^2+1}$$

alors

$$\int_{\varepsilon}^{1} h(u)\ du = -\int_{1}^{1/\varepsilon} \frac{\ln(x)}{x^2+1}dx \to \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}dx = K \quad \text{quand } \varepsilon \to 0^+$$

$\displaystyle\int_0^1 h(u)\ du$ converge et vaut $-K$

b) Comme $h(x) \leq 0$ pour $x \leq 1$ on a $\int_0^1 |h(x)|\ \ dx = \int_0^1 -h(x)\ dx$ converge et vaut K
Et comme $h(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$ on a $\int_1^{+\infty} |h(x)|\ \ dx = \int_1^{\infty} h(x)\ dx$ converge et vaut K
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\ \ dx$ converge et est égale à $2K$.

c) Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\ dx$ est absolument convergente donc convergente
$\int_0^{+\infty} h(x)\ dx = \int_1^{\infty} h(x)\ dx + \int_0^1 h(x)\ dx = K - K = 0$

4. a) Comme $n+1+nx^2 \geq 0$ et $1+x^2 \geq 0$ alors pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| - |h(x)| &= \left|\frac{n\ln x}{n+1+nx^2}\right| - \left|\frac{\ln x}{1+x^2}\right| \\
&= |\ln(x)| \left(\frac{n}{n+1+nx^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) \\
&= |\ln(x)| \frac{n+nx^2-(n+1+nx^2)}{(n+1+nx^2)(1+x^2)} \\
&= |\ln(x)| \frac{-1}{(n+1+nx^2)(1+x^2)} \leq 0
\end{aligned}$$

Donc $0 \leq |f_n(x)| \leq |h(x)|$ et par majoration, comme $\int_0^{+\infty} h(x)\ dx$ converge alors $\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$ converge également.

b) Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned}
h(x) - f_n(x) &= \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{n\ln x}{n+1+nx^2} \\
&= \frac{\ln x}{1+x^2}\left(1 - \frac{n(1+x^2)}{n+1+nx^2}\right) \\
&= \frac{\ln x}{1+x^2}\left(\frac{n+1+nx^2-n(1+x^2)}{n+1+nx^2}\right) \\
&= \frac{h(x)}{n+1+nx^2}
\end{aligned}$$

c) On a alors pour tout réel x, $n+1+nx^2 \geq n+1 > 0$ et $\dfrac{1}{n+1+nx^2} \leq \dfrac{1}{n+1}$
et donc pour $x \geq 1$ et en multipliant par $h(x) \geq 0$: $0 \leq h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n+1+nx^2} \leq \frac{h(x)}{n+1}$
En intégrant sur $[1, M]$ avec $1 \leq M$:

$$\int_1^M 0\,dx \leq \int_1^M h(x) - f_n(x)\ dx \leq \int_1^M \frac{h(x)}{n+1}\,dx = \frac{1}{n+1}\int_1^M h(x)\ dx$$

et par passage à la limite dans les inégalités (on sait déjà que les limites existent)

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant \frac{K}{n+1}$$

De même si $0 < x \leq 1$ alors $\ln(x) < 0$ et $\dfrac{h(x)}{1+n} \leq \dfrac{h(x)}{n+1+nx^2} \leq 0$ d'où en intégrant sur $[\varepsilon, 0]$ et en passant à la lmite quand $\varepsilon \to 0$:

$$-\frac{K}{n+1} \quad \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant 0$$

d) Par encadrement on a alors $\int_1^{+\infty}(h(x) - f_n(x))\ dx \to 0$ et $\int_0^1(h(x) - f_n(x))\ dx \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Donc $\int_1^{+\infty} f_n(x)\ \ dx \ \to\ \int_1^{+\infty} h(x)\ \ dx \ =\ K$ et $\int_0^1 f_n(x)\ \ dx \ \to\ \int_0^1 h(x)\ \ dx \ =\ -K$ quand $n \to +\infty$.
Donc $\int_0^{+\infty} f_n(x)\ \ dx = \int_1^{+\infty} f_n(x)\ \ dx + \int_0^1 f_n(x)\ \ dx \to 0$ quand $n \to +\infty$